Finanse

Wartość pieniądza w czasie

Wartość pieniądza w czasie

Zmiany wartości pieniądza w czasie

- Wartość pieniądza w czasie
- Pojęcia wartości obecnej i przyszłej dla jednostkowych kwot
- Pojęcia wartości obecnej i przyszłej dla kwot wielokrotnych
- Przykłady i zadania z wykorzystaniem koncepcji Future value i Present value.
- Interpretacja wyników

Wartość pieniądza w czasie

Pojęcie Future value (wartość przyszła)

FV to wartość w przyszłości danej kwoty środków pieniężnych przy założeniu istnienia zadanej stopy procentowej.

Oznaczenia :

PV_0 = dzisiejsza wartość;

k = roczna stopa procentowa;

I = wartość odsetek w okresie badanym = $k^*(PV_0)$;

FV = wartość przyszła (końcowa);

n = liczba okresów (lat) będąca z przedziału (0, nieskończoność) -zawsze liczba całkowita.

$FV_1 = PV_0 + I$

$I = k^* PV_0$

$FV_1 = PV_0 + k^* PV_0$

$FV_1 = PV_0 *(1+k)$ wzór na wartość przyszłą na koniec pierwszego okresu

Wartość pieniądza w czasie

KAPITAŁ	**%**	**ODSETKI**	**KAPITAŁ + ODSETKI**
PV_0	k	$k*PV_0$	$PV_0 + k*PV_0 = PV_0 *(1+k)^1$
$PV_0 *(1+k)^1$	k	$k* PV_0 *(1+k)^1$	$PV_0 *(1+k)^1 + k* PV_0 *(1+k)^1 = PV_0 *(1+k)^2$
$PV_0 *(1+k)^2$	k	$k* PV_0 *(1+k)^2$	$PV_0 *(1+k)^2 + k* PV_0 *(1+k)^2 = PV_0 *(1+k)^3$
……………..	….	………………...	…………………………………………………
$PV_0 *(1+k)^{n-1}$	k	$k* PV_0 *(1+k)^{n-1}$	$PV_0 *(1+k)^{n-1} + k* PV_0 *(1+k)^{n-1} = \mathbf{PV_0 *(1+k)^n}$

$$\mathbf{FV_n = PV_0 * (1 + k)^n}$$

Charakterystyka future value

Wartość przyszła

Czynnik procentowy (1+k)

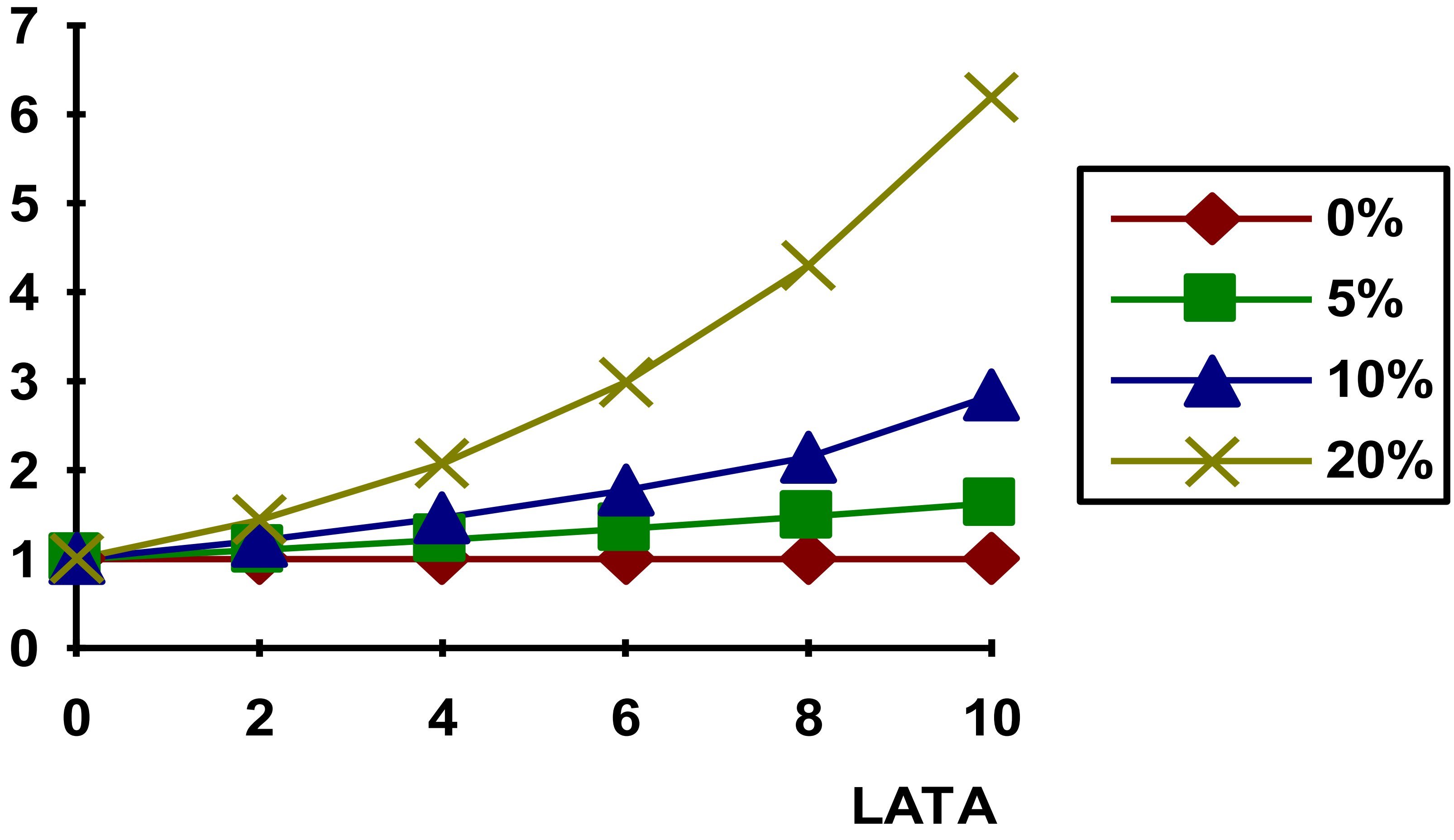


Tabela 1. Wartość pieniądza w czasie -wartość przyszła od jednorazowej wpłaty

Okres n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	1,010	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,110	1,120	1,130	1,140	1,150	1,160	1,170	1,180	1,190	1,200
2	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	1,440
3	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685	1,728
4	1,041	1,082	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518	1,574	1,630	1,689	1,749	1,811	1,874	1,939	2,005	2,074
5	1,051	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685	1,762	1,842	1,925	2,011	2,100	2,192	2,288	2,386	2,488
6	1,062	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870	1,974	2,082	2,195	2,313	2,436	2,565	2,700	2,840	2,986
7	1,072	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076	2,211	2,353	2,502	2,660	2,826	3,001	3,185	3,379	3,583
8	1,083	1,172	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305	2,476	2,658	2,853	3,059	3,278	3,511	3,759	4,021	4,300
9	1,094	1,195	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558	2,773	3,004	3,252	3,518	3,803	4,108	4,435	4,785	5,160
10	1,105	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839	3,106	3,395	3,707	4,046	4,411	4,807	5,234	5,695	6,192
11	1,116	1,243	1,384	1,539	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,152	3,479	3,836	4,226	4,652	5,117	5,624	6,176	6,777	7,430
12	1,127	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813	3,138	3,498	3,896	4,335	4,818	5,350	5,936	6,580	7,288	8,064	8,916
13	1,138	1,294	1,469	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	3,883	4,363	4,898	5,492	6,153	6,886	7,699	8,599	9,596	10,699
14	1,149	1,319	1,513	1,732	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342	3,797	4,310	4,887	5,535	6,261	7,076	7,988	9,007	10,147	11,420	12,839
15	1,161	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	4,785	5,474	6,254	7,138	8,137	9,266	10,539	11,974	13,590	15,407
16	1,173	1,373	1,605	1,873	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970	4,595	5,311	6,130	7,067	8,137	9,358	10,748	12,330	14,129	16,172	18,488
17	1,184	1,400	1,653	1,948	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328	5,054	5,895	6,866	7,986	9,276	10,761	12,468	14,426	16,672	19,244	22,186
18	1,196	1,428	1,702	2,026	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717	5,560	6,544	7,690	9,024	10,575	12,375	14,463	16,879	19,673	22,901	26,623
19	1,208	1,457	1,754	2,107	2,527	3,026	3,617	4,316	5,142	6,116	7,263	8,613	10,197	12,056	14,232	16,777	19,748	23,214	27,252	31,948
20	1,220	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	8,062	9,646	11,523	13,743	16,367	19,461	23,106	27,393	32,429	38,338
21	1,232	1,516	1,860	2,279	2,786	3,400	4,141	5,034	6,109	7,400	8,949	10,804	13,021	15,668	18,822	22,574	27,034	32,324	38,591	46,005
22	1,245	1,546	1,916	2,370	2,925	3,604	4,430	5,437	6,659	8,140	9,934	12,100	14,714	17,861	21,645	26,186	31,629	38,142	45,923	55,206
23	1,257	1,577	1,974	2,465	3,072	3,820	4,741	5,871	7,258	8,954	11,026	13,552	16,627	20,362	24,891	30,376	37,006	45,008	54,649	66,247
24	1,270	1,608	2,033	2,563	3,225	4,049	5,072	6,341	7,911	9,850	12,239	15,179	18,788	23,212	28,625	35,236	43,297	53,109	65,032	79,497
25	1,282	1,641	2,094	2,666	3,386	4,292	5,427	6,848	8,623	10,835	13,585	17,000	21,231	26,462	32,919	40,874	50,658	62,669	77,388	95,396

Wartość Manhattan'u

Początek inwestycji w 1626 roku

Cena wynegocjowana = 24$

PV0=24$	**2017**	**1996**
2%	55 320	36 498
4%	109 710 175	48 144 511
6%	188 280 160 668	55 383 626 486
8%	281 125 109 179 445	55 847 118 732 148
10%	367 071 898 992 610 000	49 602 635 283 612 200

Wartość Manhattan'u

Początek inwestycji w 1626 roku

Cena wynegocjowana = 24$

ROK 1626	rok 2017	300 lat (rok 1926)	100 lat	10 lat	1 rok
2%	55 320	9 126	174	29,3	24,5
4%	109 710 175	3 091 812	1 212	35,5	25,0
6%	188 280 160 668	937 499 017	8 143	43,0	25,4
8%	281 125 109 179 445	255 468 811 638	52 794	51,8	25,9
10%	367 071 898 992 610 000	62 808 263 908 523	330 735	62,3	26,4

Wartość pieniądza w czasie

Pojęcie Present value (wartość obecna)

Present Value to wartość kwoty lub strumieni gotówki sprowadzona do dnia dzisiejszego. Obliczenie jej wymaga znalezienia wartości dzisiejszej kwoty według zadanej stopy dyskontowej.

Oznaczenia:

PV_0 = dzisiejsza wartość;

k= roczna stopa dyskontowa;

I =wartość odsetek w okresie badanym = k*(PV_0);

FV = wartość przyszła (końcowa);

n = liczba okresów (lat) będąca z przedziału (0, nieskończoność) -zawsze liczba całkowita.

$FV_1 = PV_0 *(1+k)$ stąd **wzór na wartość obecną kwoty, która pojawi się za rok od momentu wpłaty**

$$PV_0 = \frac{FV_1}{(1+k)}$$

wzór na wartość obecną kwoty, która pojawi się w n-tym okresie

$$\cancel{PV_0 = \frac{FV_n}{(1+k)^n}}$$

$$PV_0 = FV_n * \frac{1}{(1+k)^n}$$

Charakterystyka wartości bieżącej

Wartość bieżąca PV_0

Czynnik dyskontujący $1/(1+k)$

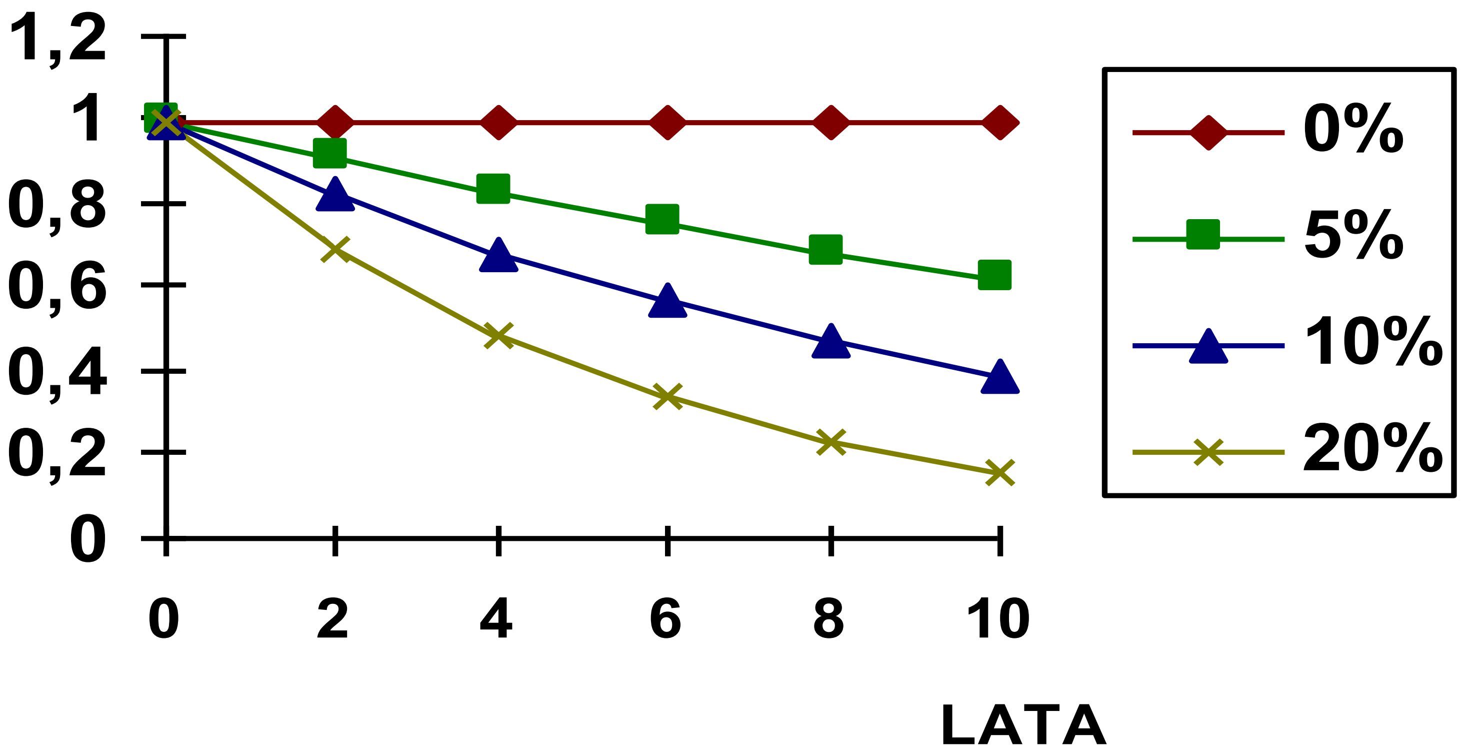


Tabela 2. Wartość pieniądza w czasie

Wartość bieżąca (PV_0) od jednorazowej wpłaty

Okres n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833
2	0,980	0,961	0,943	0,925	0,907	0,890	0,873	0,857	0,842	0,826	0,812	0,797	0,783	0,769	0,756	0,743	0,731	0,718	0,706	0,694
3	0,971	0,942	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,731	0,712	0,693	0,675	0,658	0,641	0,624	0,609	0,593	0,579
4	0,961	0,924	0,888	0,855	0,823	0,792	0,763	0,735	0,708	0,683	0,659	0,636	0,613	0,592	0,572	0,552	0,534	0,516	0,499	0,482
5	0,951	0,906	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,593	0,567	0,543	0,519	0,497	0,476	0,456	0,437	0,419	0,402
6	0,942	0,888	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,535	0,507	0,480	0,456	0,432	0,410	0,390	0,370	0,352	0,335
7	0,933	0,871	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,482	0,452	0,425	0,400	0,376	0,354	0,333	0,314	0,296	0,279
8	0,923	0,853	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,434	0,404	0,376	0,351	0,327	0,305	0,285	0,266	0,249	0,233
9	0,914	0,837	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,391	0,361	0,333	0,308	0,284	0,263	0,243	0,225	0,209	0,194
10	0,905	0,820	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,422	0,386	0,352	0,322	0,295	0,270	0,247	0,227	0,208	0,191	0,176	0,162
11	0,896	0,804	0,722	0,650	0,585	0,527	0,475	0,429	0,388	0,350	0,317	0,287	0,261	0,237	0,215	0,195	0,178	0,162	0,148	0,135
12	0,887	0,788	0,701	0,625	0,557	0,497	0,444	0,397	0,356	0,319	0,286	0,257	0,231	0,208	0,187	0,168	0,152	0,137	0,124	0,112
13	0,879	0,773	0,681	0,601	0,530	0,469	0,415	0,368	0,326	0,290	0,258	0,229	0,204	0,182	0,163	0,145	0,130	0,116	0,104	0,093
14	0,870	0,758	0,661	0,577	0,505	0,442	0,388	0,340	0,299	0,263	0,232	0,205	0,181	0,160	0,141	0,125	0,111	0,099	0,088	0,078
15	0,861	0,743	0,642	0,555	0,481	0,417	0,362	0,315	0,275	0,239	0,209	0,183	0,160	0,140	0,123	0,108	0,095	0,084	0,074	0,065
16	0,853	0,728	0,623	0,534	0,458	0,394	0,339	0,292	0,252	0,218	0,188	0,163	0,141	0,123	0,107	0,093	0,081	0,071	0,062	0,054
17	0,844	0,714	0,605	0,513	0,436	0,371	0,317	0,270	0,231	0,198	0,170	0,146	0,125	0,108	0,093	0,080	0,069	0,060	0,052	0,045
18	0,836	0,700	0,587	0,494	0,416	0,350	0,296	0,250	0,212	0,180	0,153	0,130	0,111	0,095	0,081	0,069	0,059	0,051	0,044	0,038
19	0,828	0,686	0,570	0,475	0,396	0,331	0,277	0,232	0,194	0,164	0,138	0,116	0,098	0,083	0,070	0,060	0,051	0,043	0,037	0,031
20	0,820	0,673	0,554	0,456	0,377	0,312	0,258	0,215	0,178	0,149	0,124	0,104	0,087	0,073	0,061	0,051	0,043	0,037	0,031	0,026
21	0,811	0,660	0,538	0,439	0,359	0,294	0,242	0,199	0,164	0,135	0,112	0,093	0,077	0,064	0,053	0,044	0,037	0,031	0,026	0,022
22	0,803	0,647	0,522	0,422	0,342	0,278	0,226	0,184	0,150	0,123	0,101	0,083	0,068	0,056	0,046	0,038	0,032	0,026	0,022	0,018
23	0,795	0,634	0,507	0,406	0,326	0,262	0,211	0,170	0,138	0,112	0,091	0,074	0,060	0,049	0,040	0,033	0,027	0,022	0,018	0,015
24	0,788	0,622	0,492	0,390	0,310	0,247	0,197	0,158	0,126	0,102	0,082	0,066	0,053	0,043	0,035	0,028	0,023	0,019	0,015	0,013
25	0,780	0,610	0,478	0,375	0,295	0,233	0,184	0,146	0,116	0,092	0,074	0,059	0,047	0,038	0,030	0,024	0,020	0,016	0,013	0,010

Strumienie gotówki wielokrotne w przyszłości (FV)

Definicje:

Renta (annuity) to seria płatności stałych kwot w pewnej liczbie okresów

Renta zwykła (ordinary annuity) to seria równych płatności w określonej liczbie okresów przy czym każda płatność pojawia się w końcu okresu (dla wyjaśnienia: muszę zebrać kwotę, aby dokonać pierwszej płatności).

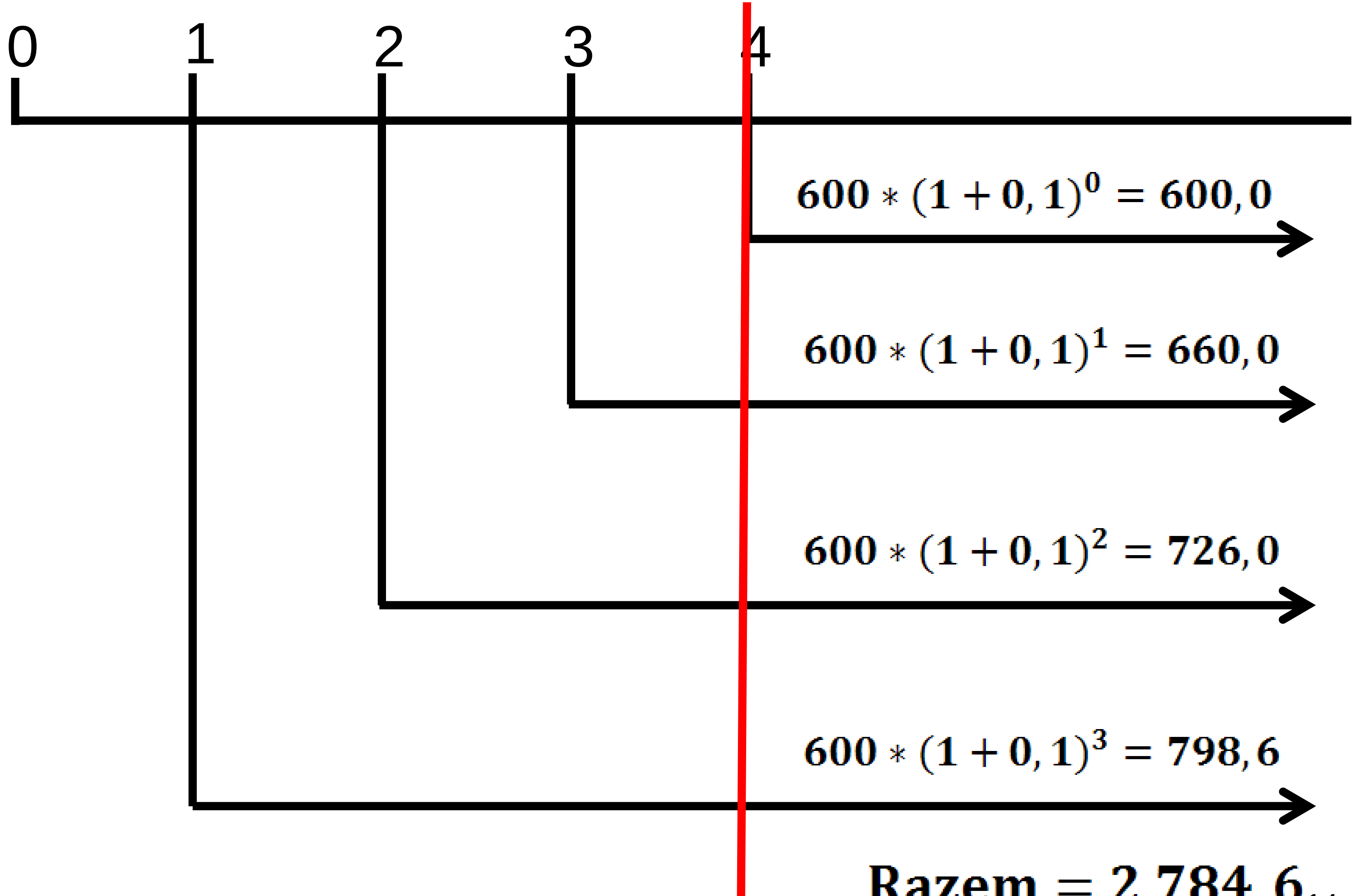
Przykład:

Wpłacam do banku po 600 PLN w końcu każdego z 4 lat.

Stopa procentowa = 10%.

Jaka jest wartość przyszła tego strumienia pieniądza?

Wartość pieniądza w czasie. Renta przyszła zwykła -wartość wielu płatności w przyszłości (płatności z dołu)



$$\mathbf{Razem = 2\ 784,6}$$

Wyprowadzenie wzoru na future value dla wielu płatności

P = pojedyncza kwota, która pojawia się każdego roku;

k= roczna stopa procentowa;

FV_n = wartość przyszła (końcowa) dla n-tego okresu;

n = liczba okresów (lat) będąca z przedziału (0, nieskończoność) -zawsze liczba całkowita.

$$FV_n = P*(1+k)^0 + P*(1+k)^1 + P*(1+k)^2 + \dots\dots\dots + P*(1+k)^{n-1}$$

$$(1+k) * FV_n = P*(1+k)^1 + P*(1+k)^2 + P*(1+k)^3 + \dots\dots\dots + P*(1+k)^{n-1} + P*(1+k)^n$$

$$-FV_n = -P*(1+k)^0 - P*(1+k)^1 - P*(1+k)^2 + \dots\dots\dots - P*(1+k)^{n-1}$$

$$(1+k) * FV_n - FV_n = P *(1+k)^n - P$$

$$FV_n = P\frac{(1+k)^n - 1}{k}$$

Tabela 3. Wartość pieniądza w czasie WARTOŚĆ PRZYSZŁA renty przyszłe FVA = $[(1+k)^n -1]/k$

Okres n	**1%**	**2%**	**3%**	**4%**	**5%**	**6%**	**7%**	**8%**	**9%**	**10%**	**11%**	**12%**	**13%**	**14%**	**15%**	**16%**	**17%**	**18%**	**19%**	**20%**
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09	2,10	2,11	2,12	2,13	2,14	2,15	2,16	2,17	2,18	2,19	2,20
3	3,03	3,06	3,09	3,12	3,15	3,18	3,21	3,25	3,28	3,31	3,34	3,37	3,41	3,44	3,47	3,51	3,54	3,57	3,61	3,64
4	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31	4,37	4,44	4,51	4,57	4,64	4,71	4,78	4,85	4,92	4,99	5,07	5,14	5,22	5,29	5,37
5	5,10	5,20	5,31	5,42	5,53	5,64	5,75	5,87	5,98	6,11	6,23	6,35	6,48	6,61	6,74	6,88	7,01	7,15	7,30	7,44
6	6,15	6,31	6,47	6,63	6,80	6,98	7,15	7,34	7,52	7,72	7,91	8,12	8,32	8,54	8,75	8,98	9,21	9,44	9,68	9,93
7	7,21	7,43	7,66	7,90	8,14	8,39	8,65	8,92	9,20	9,49	9,78	10,09	10,40	10,73	11,07	11,41	11,77	12,14	12,52	12,92
8	8,29	8,58	8,89	9,21	9,55	9,90	10,26	10,64	11,03	11,44	11,86	12,30	12,76	13,23	13,73	14,24	14,77	15,33	15,90	16,50
9	9,37	9,75	10,16	10,58	11,03	11,49	11,98	12,49	13,02	13,58	14,16	14,78	15,42	16,09	16,79	17,52	18,28	19,09	19,92	20,80
10	10,46	10,95	11,46	12,01	12,58	13,18	13,82	14,49	15,19	15,94	16,72	17,55	18,42	19,34	20,30	21,32	22,39	23,52	24,71	25,96
11	11,57	12,17	12,81	13,49	14,21	14,97	15,78	16,65	17,56	18,53	19,56	20,65	21,81	23,04	24,35	25,73	27,20	28,76	30,40	32,15
12	12,68	13,41	14,19	15,03	15,92	16,87	17,89	18,98	20,14	21,38	22,71	24,13	25,65	27,27	29,00	30,85	32,82	34,93	37,18	39,58
13	13,81	14,68	15,62	16,63	17,71	18,88	20,14	21,50	22,95	24,52	26,21	28,03	29,98	32,09	34,35	36,79	39,40	42,22	45,24	48,50
14	14,95	15,97	17,09	18,29	19,60	21,02	22,55	24,21	26,02	27,97	30,09	32,39	34,88	37,58	40,50	43,67	47,10	50,82	54,84	59,20
15	16,10	17,29	18,60	20,02	21,58	23,28	25,13	27,15	29,36	31,77	34,41	37,28	40,42	43,84	47,58	51,66	56,11	60,97	66,26	72,04
16	17,26	18,64	20,16	21,82	23,66	25,67	27,89	30,32	33,00	35,95	39,19	42,75	46,67	50,98	55,72	60,93	66,65	72,94	79,85	87,44
17	18,43	20,01	21,76	23,70	25,84	28,21	30,84	33,75	36,97	40,54	44,50	48,88	53,74	59,12	65,08	71,67	78,98	87,07	96,02	105,93
18	19,61	21,41	23,41	25,65	28,13	30,91	34,00	37,45	41,30	45,60	50,40	55,75	61,73	68,39	75,84	84,14	93,41	103,74	115,27	128,12
19	20,81	22,84	25,12	27,67	30,54	33,76	37,38	41,45	46,02	51,16	56,94	63,44	70,75	78,97	88,21	98,60	110,28	123,41	138,17	154,74
20	22,02	24,30	26,87	29,78	33,07	36,79	41,00	45,76	51,16	57,27	64,20	72,05	80,95	91,02	102,44	115,38	130,03	146,63	165,42	186,69
21	23,24	25,78	28,68	31,97	35,72	39,99	44,87	50,42	56,76	64,00	72,27	81,70	92,47	104,77	118,81	134,84	153,14	174,02	197,85	225,03
22	24,47	27,30	30,54	34,25	38,51	43,39	49,01	55,46	62,87	71,40	81,21	92,50	105,49	120,44	137,63	157,41	180,17	206,34	236,44	271,03
23	25,72	28,84	32,45	36,62	41,43	47,00	53,44	60,89	69,53	79,54	91,15	104,60	120,20	138,30	159,28	183,60	211,80	244,49	282,36	326,24
24	26,97	30,42	34,43	39,08	44,50	50,82	58,18	66,76	76,79	88,50	102,17	118,16	136,83	158,66	184,17	213,98	248,81	289,49	337,01	392,48
25	28,24	32,03	36,46	41,65	47,73	54,86	63,25	73,11	84,70	98,35	114,41	133,33	155,62	181,87	212,79	249,21	292,10	342,60	402,04	471,98

Renta przesunięta (annuity due) dla wartości przyszłej.

To seria płatności stałych kwot w pewnej liczbie okresów w przyszłości.

Każda płatność pojawia się na początku okresu (wpłaty z góry).

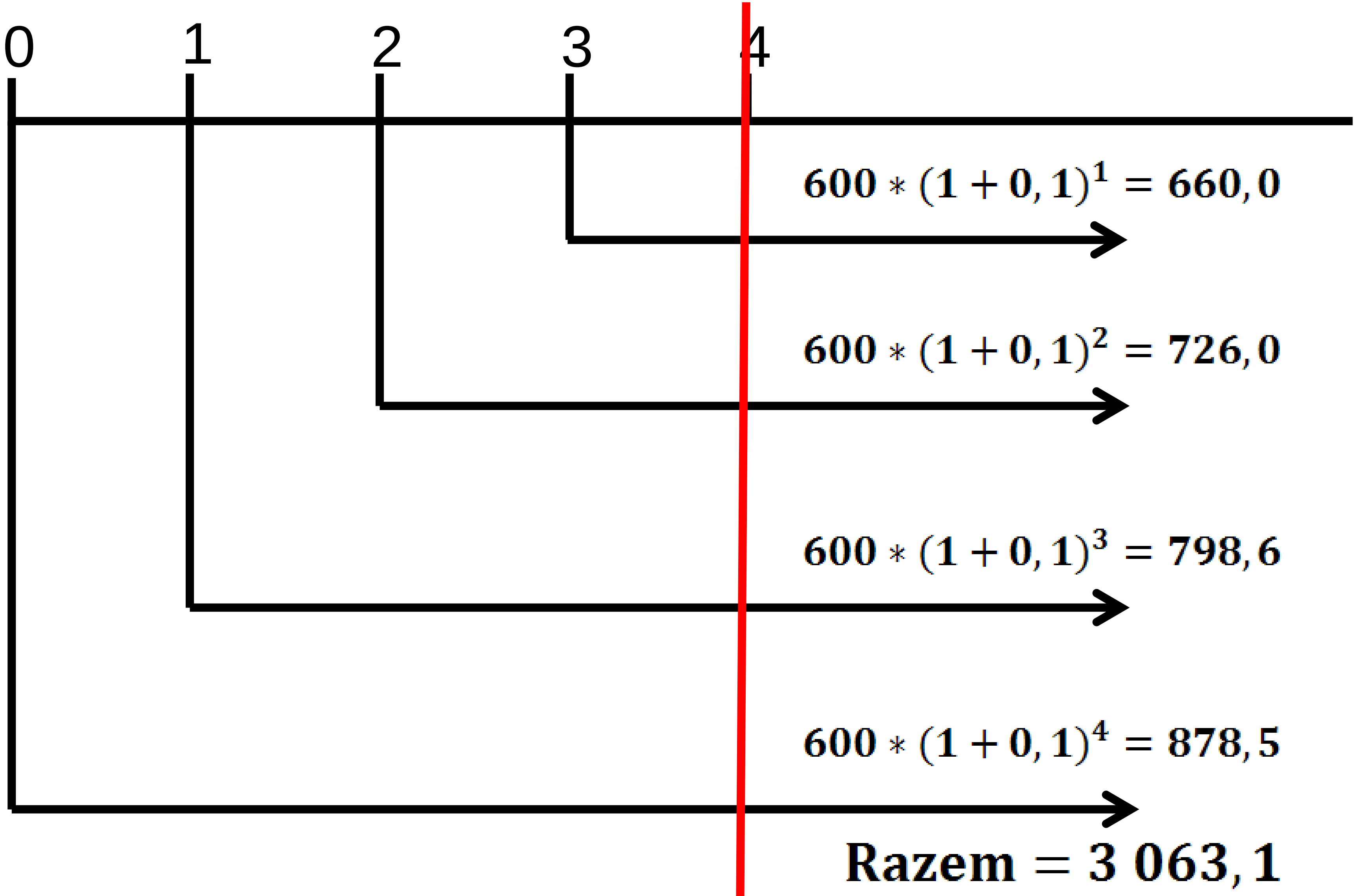
Przykład:

Wpłacam do banku po 600 PLN na początku każdego z 4 lat.

Stopa procentowa = 10%.

Jaka jest wartość przyszła tego strumienia pieniądza?

Wartość pieniądza w czasie. Renta przyszła przesunięta-wartość wielu płatności w przyszłości (płatności z góry)



$$\text{Razem} = 3\ 063,1$$

Wartość pieniądza w czasie. Renta przyszła przesunięta wartość wielu wpłat w przyszłości (wpłaty z góry) czyli widać, że wartość renty zwykłej mnożymy przez (1+k)

$$FV_n = P\,\frac{(1+k)^n-1}{k} * (1+k)$$

Wyprowadzenie wzoru na obliczanie PV od wielokrotnych płatności (renta zwykła).

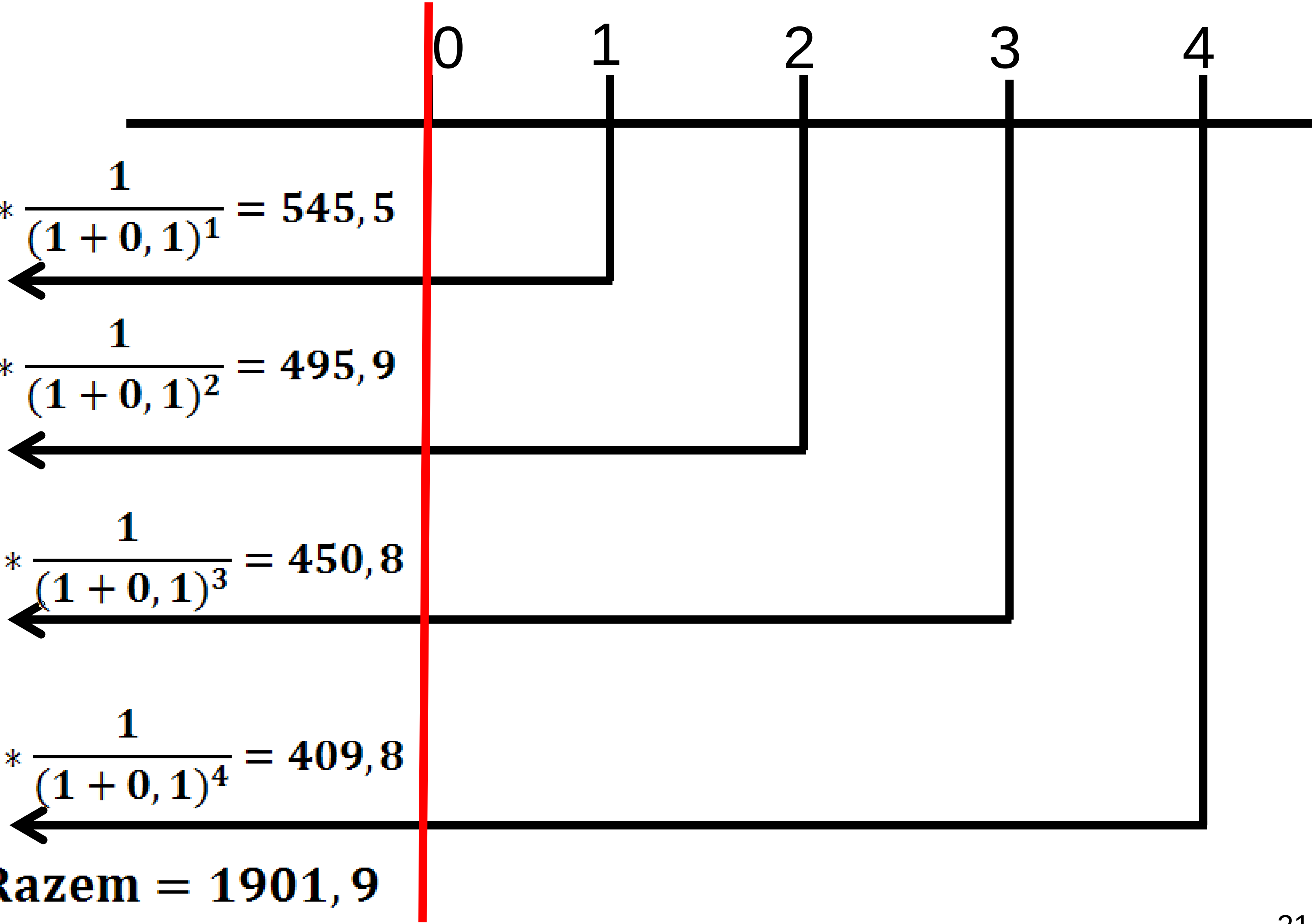
Renta zwykła (ordinary annuity) –płatności pojawiają się w końcu okresu czyli z dołu.

Przykład:

Obiecano mi w przyszłości ciąg czterech płatności na moją korzyść w wysokości 600 PLN każda. Wszystkie pojawiają się w końcu każdego z okresów. Stopa dyskontowa = 10%.

Jaka jest wartość obecna tego strumienia pieniądza?

Wartość pieniądza w czasie. Renta bieżąca zwykła –obecna wartość wielu płatności w planowanych przyszłości (płatności z dołu)



$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^1} = 545,5$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^2} = 495,9$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^3} = 450,8$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^4} = 409,8$$

$$\text{Razem} = 1901,9$$

Wyprowadzenie wzoru na present value dla wielu płatności

PV_0=P*(1+k)^n gdzie:

P = pojedyncza kwota, która pojawi się w przyszłości;

k= roczna stopa dyskontowa;

PV_0 = wartość obecna;

n = liczba okresów (lat) będąca z przedziału (0, nieskończoność) -zawsze liczba całkowita.

$$PV_0 = \frac{P}{(1+k)^1} + \frac{P}{(1+k)^2} \dots + \frac{P}{(1+k)^{n-1}} + \frac{P}{(1+k)^n}$$

$$-(1+k) * PV_0 = -\frac{P}{(1+k)^0} - \frac{P}{(1+k)^1} - \frac{P}{(1+k)^2} - \dots + \frac{P}{(1+k)^{n-2}} - \frac{P}{(1+k)^{n-1}}$$

$$-(1+k) * PV_0 + PV_0 = \frac{P}{(1+k)^n} - P$$

wzór na wartość obecną ciągu płatności, które pojawią się w przyszłości.

$$PV_0 = P \frac{1 - \frac{1}{(1+k)^n}}{k}$$

Tabela 4. Wartość pieniądza w czasie WARTOŚĆ OBECNA renta bieżąca PVA= [1-(1/(1+k)n]/k

Okres n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,88	0,87	0,86	0,85	0,85	0,84	0,83
2	1,97	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,81	1,78	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,55	1,53
3	2,94	2,88	2,83	2,78	2,72	2,67	2,62	2,58	2,53	2,49	2,44	2,40	2,36	2,32	2,28	2,25	2,21	2,17	2,14	2,11
4	3,90	3,81	3,72	3,63	3,55	3,47	3,39	3,31	3,24	3,17	3,10	3,04	2,97	2,91	2,85	2,80	2,74	2,69	2,64	2,59
5	4,85	4,71	4,58	4,45	4,33	4,21	4,10	3,99	3,89	3,79	3,70	3,60	3,52	3,43	3,35	3,27	3,20	3,13	3,06	2,99
6	5,80	5,60	5,42	5,24	5,08	4,92	4,77	4,62	4,49	4,36	4,23	4,11	4,00	3,89	3,78	3,68	3,59	3,50	3,41	3,33
7	6,73	6,47	6,23	6,00	5,79	5,58	5,39	5,21	5,03	4,87	4,71	4,56	4,42	4,29	4,16	4,04	3,92	3,81	3,71	3,60
8	7,65	7,33	7,02	6,73	6,46	6,21	5,97	5,75	5,53	5,33	5,15	4,97	4,80	4,64	4,49	4,34	4,21	4,08	3,95	3,84
9	8,57	8,16	7,79	7,44	7,11	6,80	6,52	6,25	6,00	5,76	5,54	5,33	5,13	4,95	4,77	4,61	4,45	4,30	4,16	4,03
10	9,47	8,98	8,53	8,11	7,72	7,36	7,02	6,71	6,42	6,14	5,89	5,65	5,43	5,22	5,02	4,83	4,66	4,49	4,34	4,19
11	10,37	9,79	9,25	8,76	8,31	7,89	7,50	7,14	6,81	6,50	6,21	5,94	5,69	5,45	5,23	5,03	4,84	4,66	4,49	4,33
12	11,26	10,58	9,95	9,39	8,86	8,38	7,94	7,54	7,16	6,81	6,49	6,19	5,92	5,66	5,42	5,20	4,99	4,79	4,61	4,44
13	12,13	11,35	10,63	9,99	9,39	8,85	8,36	7,90	7,49	7,10	6,75	6,42	6,12	5,84	5,58	5,34	5,12	4,91	4,71	4,53
14	13,00	12,11	11,30	10,56	9,90	9,29	8,75	8,24	7,79	7,37	6,98	6,63	6,30	6,00	5,72	5,47	5,23	5,01	4,80	4,61
15	13,87	12,85	11,94	11,12	10,38	9,71	9,11	8,56	8,06	7,61	7,19	6,81	6,46	6,14	5,85	5,58	5,32	5,09	4,88	4,68
16	14,72	13,58	12,56	11,65	10,84	10,11	9,45	8,85	8,31	7,82	7,38	6,97	6,60	6,27	5,95	5,67	5,41	5,16	4,94	4,73
17	15,56	14,29	13,17	12,17	11,27	10,48	9,76	9,12	8,54	8,02	7,55	7,12	6,73	6,37	6,05	5,75	5,47	5,22	4,99	4,77
18	16,40	14,99	13,75	12,66	11,69	10,83	10,06	9,37	8,76	8,20	7,70	7,25	6,84	6,47	6,13	5,82	5,53	5,27	5,03	4,81
19	17,23	15,68	14,32	13,13	12,09	11,16	10,34	9,60	8,95	8,36	7,84	7,37	6,94	6,55	6,20	5,88	5,58	5,32	5,07	4,84
20	18,05	16,35	14,88	13,59	12,46	11,47	10,59	9,82	9,13	8,51	7,96	7,47	7,02	6,62	6,26	5,93	5,63	5,35	5,10	4,87
21	18,86	17,01	15,42	14,03	12,82	11,76	10,84	10,02	9,29	8,65	8,08	7,56	7,10	6,69	6,31	5,97	5,66	5,38	5,13	4,89
22	19,66	17,66	15,94	14,45	13,16	12,04	11,06	10,20	9,44	8,77	8,18	7,64	7,17	6,74	6,36	6,01	5,70	5,41	5,15	4,91
23	20,46	18,29	16,44	14,86	13,49	12,30	11,27	10,37	9,58	8,88	8,27	7,72	7,23	6,79	6,40	6,04	5,72	5,43	5,17	4,92
24	21,24	18,91	16,94	15,25	13,80	12,55	11,47	10,53	9,71	8,98	8,35	7,78	7,28	6,84	6,43	6,07	5,75	5,45	5,18	4,94
25	22,02	19,52	17,41	15,62	14,09	12,78	11,65	10,67	9,82	9,08	8,42	7,84	7,33	6,87	6,46	6,10	5,77	5,47	5,20	4,95

Wyprowadzenie wzoru na obliczanie PV od wielokrotnych płatności (renta przesunięta)

Renta przesunięta (annuity due) –płatności pojawiają się na początku każdego z okresów (płatności z góry).

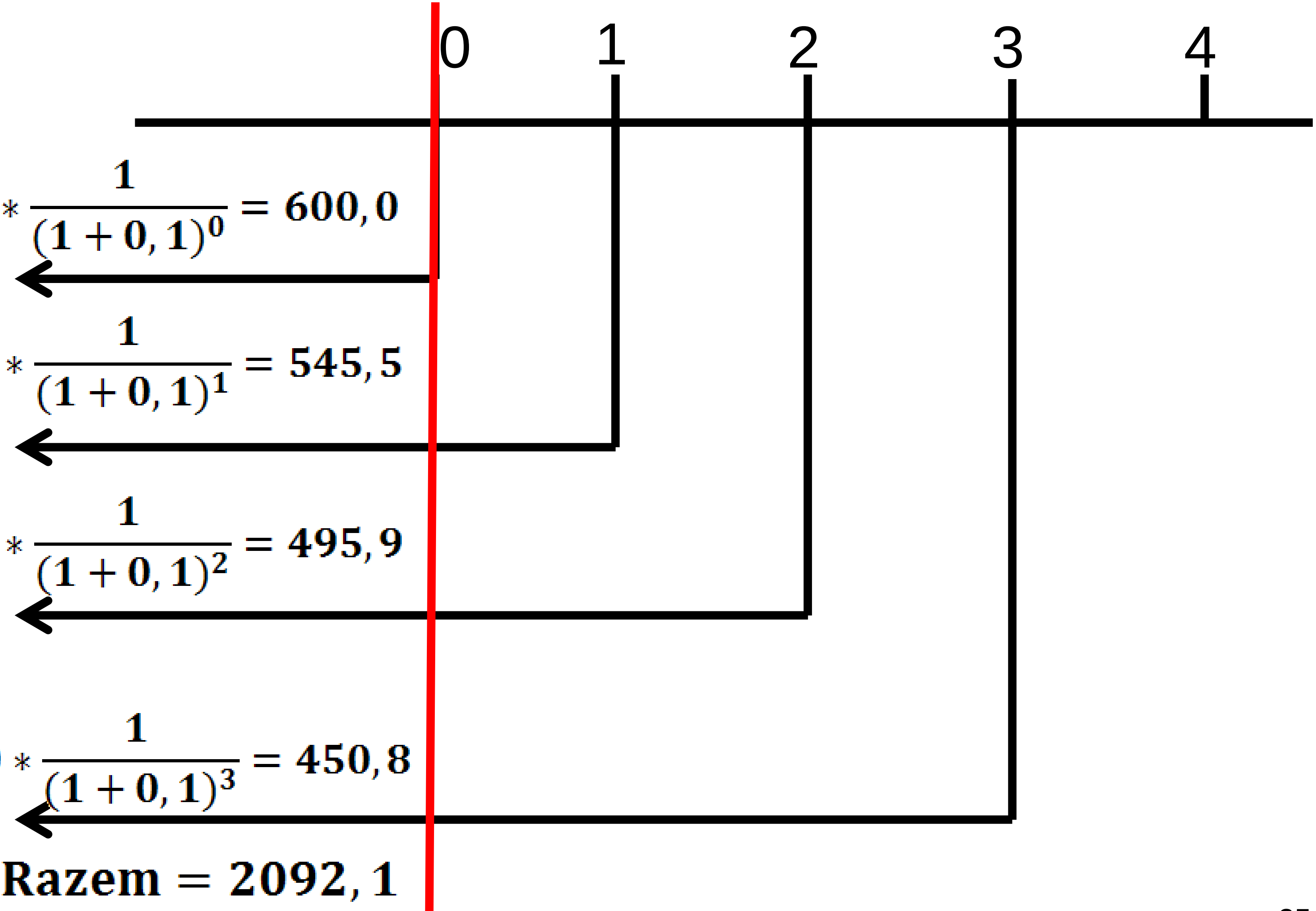
Przykład:

Obiecano mi ciąg czterech płatności na moją korzyść w wysokości 600 PLN każda. Pojawiają się na początku każdego z okresów.

Stopa dyskontowa = 10%.

Jaka jest wartość obecna tego strumienia pieniądza?

Wartość pieniądza w czasie. Renta bieżąca przesunięta –obecna wartość wielu płatności w planowanych przyszłości (płatności z góry)



$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^0} = 600,0$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^1} = 545,5$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^2} = 495,9$$

$$600 * \frac{1}{(1+0,1)^3} = 450,8$$

$$\mathbf{Razem} = 2092,1$$

Wartość pieniądza w czasie Renta bieżąca (wpłaty z góry)

$$PV_0 = P \frac{1 - \frac{1}{(1+k)^n}}{k} * (1+k)$$

Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem koncepcji Future value i Present value.

1. Obliczyć FV od 325 GBP po 4 latach przy oprocentowaniu 12%;
2. Obliczyć FV od 650 GBP po 9-ciu latach przy oprocentowaniu 6%;
3. Obliczyć FV od ciągu wpłat do banku po 150 GBP w okresie 6 lat na 10%;
4. Obliczyć FV od ciągu wpłat do banku po 480 GBP w okresie 3 lat na 17%;
5. Obliczyć PV od ciągu płatności 200 GBP w okresie 3 lat przy stopie dyskontowej 8%.

	FV	PV
1-krotne	1	2
w-krotne	3	4

6. Znaleźć PV_0 od następujących strumieni, gdy stopa dyskontowa=11%. Która inwestycja jest lepsza? Zastosuj w drugim przypadku tabelę na renty.

	Projekt A	Projekt B
Rok 1	**100**	**400**
Rok 2	**200**	**400**
Rok 3	**200**	**100**
Rok 4	**300**	**100**
Rok 5	**300**	**100**
Razem	**1100**	**1100**

Zadanie 7

Klient zaciągnął w banku pięcioletnią pożyczkę w wysokości 10 000 zł, spłacaną w równych ratach rocznych obejmujących odsetki i ratę kapitałową. Ile wynosi roczna rata przy stopie procentowej 10% rocznie? Należy rozpisać spłaty tego kredytu.

Zadanie należy zacząć od obliczenia spłat kredytu metodą tradycyjną (rat malejących).

Rozwiązanie zadania 7 (metoda tradycyjna)

Do spłaty	odsetki	raty kap.	do banku

Rozwiązanie zadania 7 (metoda annuitetowa)

Do spłaty	odsetki	raty kap.	do banku

Wartość pieniądza w czasie -zadania

8. Twoja firma ma plan emerytalny. Polega on na wpłacie przez pracownika 2000 GBP rocznie, a firma doda ze swojej strony 1000 GBP. Firma gwarantuje 8% zwrot od wpłaconych funduszy. Alternatywnie można przy rocznym oprocentowaniu 11% rocznie wpłacać 2000 GBP (pierwsza rata po roku od dnia dzisiejszego). Która możliwość jest lepsza?

a) jeżeli pracownik idzie na emeryturę po 20 latach?

b) jeżeli pracownik idzie na emeryturę po 25 latach?

9. Inwestor ma obecnie 3000 GBP i chce wiedzieć jak długo będzie trwało podwojenie tej kwoty zakładając oprocentowanie składane na :

a) 5%

b) 10%

c) 15%

10. Pracownik chce zaplanować swoje odejście na emeryturę za 25 lat. Przez 10 lat może zaoszczędzić 3000 GBP rocznie (pierwszy depozyt złożony za rok od teraz). Po tym czasie kupi sobie domek letni za kwotę 40 000 GBP.

Ile musi odkładać w latach 11-25 tak, aby miał 300 tyś. GBP w dniu odejścia na emeryturę? Należy założyć, że oprocentowanie roczne będzie wynosiło 10% rocznie w każdym z 25 lat.

Zadanie 11

Jaką kwotę należy zainwestować dzisiaj, aby otrzymać:

a) 12 000 zł za 6 lat, przy stopie procentowej 20% rocznie?

b) 15 000 zł za 15 lat, przy stopie procentowej 16% rocznie?

Zadanie 13

Pan Kowalski kupił zabytkowe meble za 16 000 zł, sądząc iż ich cena będzie wzrastać 12% rocznie przez najbliższe 5 lat. Ile warte będą meble po 5 latach zgodnie z jego przewidywaniami?

Zadanie 14

Zgodnie z umową zawartą ze swoimi dłużnikami pan Nowak otrzymywał będzie od nich kwotę 650 zł rocznie przez najbliższe 15 lat. Jaka jest wartość bieżąca strumienia tych płatności, jeżeli stopa procentowa wynosi 8% rocznie?

	P.V.	nominał

Zadanie 15

W lipcu 2007 indeksu WIG osiągnął poziom 66 106 punktów. Po 19 miesiącach jego wartość wynosiła 21 846 punktów		
Jakie było średniomiesięczne tempo spadku indeksu (w %)?		

Zadanie 16

Jaki okres jest potrzebny, przy stopie procentowej 12% rocznie, do:

a) podwojenia kwoty złożonej dzisiaj na rachunku bankowym?

b) potrojenia kwoty złożonej dzisiaj na rachunku bankowym?

Zadanie 17

Zgodnie z warunkami umowy masz zwrócić swojemu wierzycielowi kwotę 3 000 zł na koniec piątego roku. Jaką kwotę powinien przyjąć twój wierzyciel, jeżeli dług chciałbyś spłacić dzisiaj, gdy jest on w stanie zainwestować pieniądze przy stopie zwrotu w wysokości 12% rocznie?

Zadanie 18

Sprzedawca zaoferował nabywcy trzy warianty zapłaty za towar. Zgodnie z wariantem pierwszym powinien on zapłacić 5 000 zł w chwili obecnej. Wariant drugi zakłada, iż spłata dokonywana będzie na koniec każdego z kolejnych ośmiu lat w wysokości 1 000 zł rocznie. Wariant trzeci przewiduje zaś możliwość uiszczenia całej zapłaty dopiero na koniec ósmego roku w wysokości 12000 zł. Stosując metodę PV należy ocenić która oferta jest najkorzystniejsza dla nabywcy:

a) przy stopie procentowej wynoszącej 11% rocznie?

b) przy stopie procentowej wynoszącej 12% rocznie?

Rozwiązanie zadania 18

wariant 1	wariant 2		wariant 3	

$$FV_n = PV_0 * (1+k)^n \longrightarrow FV_n = PV_0 * \left(1+\frac{k}{m}\right)^{n*m}$$

$$PV_0 = FV_n * \frac{1}{(1+k)^n} \longrightarrow PV_0 = FV_n * \frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n*m}}$$

$$FV_n = P * \frac{(1+k)^n - 1}{k} \longrightarrow FV_n = P * \frac{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n*m} - 1}{\frac{k}{m}}$$

$$PV_0 = P * \frac{1-\frac{1}{(1+k)^n}}{k} \longrightarrow PV_0 = P * \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n*m}}}{\frac{k}{m}}$$

gdzie m oznacza liczbę podokresów w okresie

Zadanie 19

Określ, jaka kwota znajdzie się na rachunku oszczędnościowym na koniec piątego roku, jeżeli depozyt początkowy wynosi 5 000 zł a roczna stopa procentowa 12%, gdy odsetki są naliczane:

- raz w roku, na koniec roku,
- co pół roku,
- co kwartał.

Wartość pieniądza w czasie -zadania

21. Firma pożyczyła 70 200 GBP na 13% na 20 lat. Jakie są odsetki i rata kapitałowa w 3-cim roku. Zadanie należy obliczyć przy założeniu, że wpłaty będą dokonywane metodą równych rat łącznych (suma rat odsetkowych i kapitałowych jest stała)

Wartość pieniądza w czasie –zadania (do zadania 21)

Kapitał do spłaty	k	Rata odsetkowa	Rata kapitałowa	Rata łączna

25. Pewien inwestor zakłada fundusz, który ma mu wypracować 200 000 GBP w ciągu 10 lat. Środki mają przynosić roczny dochód w wysokości 8% rocznie. Jaka jest wielkość wpłat rocznych jeśli:

a) wpłaty są dokonywane pod koniec roku?

b) wpłaty są dokonywane na początku roku?

Wartość pieniądza w czasie -zadania

$$FV_n = P\,\frac{(1+k)^n - 1}{k}$$

$$FV_n = P\,\frac{(1+k)^n - 1}{k} * (1+k)$$

26. Firma produkuje silniki. Chce zakończyć ich produkcję. W wartości bieżącej linia produkcyjna daje strumień gotówki 250 000 GBP rocznie. Ile należy zażądać (przy stopie dyskontowej = 16%) od ewentualnego nabywcy jeśli założy się, że linia może być sprawna przez:

a) 10 lat?

b) 15 lat?

c) nieskończenie długo?

a)			
b)			
c)			

$$\lim_{n\to\infty} P * \frac{1-\dfrac{1}{(1+k)^n}}{k} =$$

$$= \frac{P}{k}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(1+k)^n}\right) =$$

$$= \frac{P}{k}\underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{1} - \frac{P}{k}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{(1+k)^n}_{\infty}}}_{0} =$$

$$= \frac{P}{k} - 0 = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{k}}$$

Jest to wzór na rentę nieskończoną (wieczystą).